OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) ***(2 puntos)*** Sea λ un parámetro real cualquiera, determine para qué valores de λ el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{cases} -x+\lambda y+\lambda z=4 \\ \lambda x+\lambda y+z=6 \\ -\lambda x+\lambda y+\lambda z=3+\lambda \end{cases}$$

b) ***(1 punto)*** Resuélvalo, si es posible, para $\lambda = 2$

.

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \\ -\lambda & \lambda & \lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & \lambda & \lambda \\ \lambda+1 & 0 & 1-\lambda \\ -\lambda+1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-\lambda\cdot\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 0 \end{vmatrix}=(-\lambda)\cdot(-1)\cdot(1-\lambda)^2=\lambda\cdot(1-\lambda)^2 \Rightarrow$$

$$Si\ |A|=0 \Rightarrow \lambda\cdot(1-\lambda)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ \lambda-1=0 \Rightarrow \lambda=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall\lambda\in\Re-\{0\ ,1\}\Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ \lambda=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$$Si\ \lambda=1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ incognitas \Rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$b)$$

$$Si\ \lambda=2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ -2 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 14 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow -z=5 \Rightarrow z=-5 \Rightarrow -2y-2\cdot(-5)=-3 \Rightarrow$$

$$-2y+10=-3 \Rightarrow -2y=-13 \Rightarrow y=\frac{13}{2} \Rightarrow -x+2\cdot\frac{13}{2}+2\cdot(-5)=4 \Rightarrow -x+13-10=4 \Rightarrow -x+3=4 \Rightarrow$$

$$x=-1 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=\left(-1\ ,\frac{13}{2}\ ,-5\right)$$

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* **a.1)** *(0,5 puntos)* Si los vectores $\vec{w}$ y $\vec{s}$ verifican que $|\vec{w}| = |\vec{s}| = 2$, y el ángulo que forman $\vec{w}$ y $\vec{s}$ es 60 grados, determine: $\vec{w} \cdot (\vec{w} - \vec{s})$

a.2) *(0,5 puntos)* Si el producto escalar del vector $\vec{u} + \vec{w}$ por sí mismo es 25 y el producto escalar de $\vec{u} - \vec{w}$ por sí mismo es 9. ¿Cuánto vale el producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{w}$?

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman las rectas siguientes: $r: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{2}$ y

$$s: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

$a.1)$

$$\vec{w} \cdot (\vec{w} - \vec{s}) = \vec{w} \cdot \vec{w} - \vec{w} \cdot \vec{s}$$

$$\begin{cases} \vec{w} \cdot \vec{w} = |\vec{w}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos 0^{o} = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \\ \vec{w} \cdot \vec{s} = |\vec{w}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos 60^{o} = 2 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \vec{w} \cdot (\vec{w} - \vec{s}) = \vec{w} \cdot \vec{w} - \vec{w} \cdot \vec{s} = 4 - 2 = 2$$

$a.2)$

$$\begin{cases} (\vec{u} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = 25 \\ (\vec{u} - \vec{w}) \cdot (\vec{u} - \vec{w}) = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}^{\,2} + 2\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{w}^{\,2} = 25 \\ \vec{u}^{\,2} - 2\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{w}^{\,2} = 9 \end{cases} \Rightarrow 4\vec{u} \cdot \vec{w} = 16 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 4$$

b) Veamos cual es la posición relativa de las rectas dadas.
Puestas en paramétricas ambas rectas, estableceremos un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas al igualar sus coordenadas.
Si el determinante de la matriz de los coeficientes ampliada es nulo, y sus vectores directores son iguales o proporcionales pueden ser coincidentes en caso de tener algún punto común o paralelos si no lo tienen, de no ser proporcionales las rectas se cortan en un punto.
De no ser el determinante ampliado nulo, las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} \begin{cases} -x + y + z = -1 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow 3z = 2 \Rightarrow z = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x - y - \dfrac{2}{3} = 1 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3} + y \Rightarrow s: \begin{cases} x = \dfrac{5}{3} + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \dfrac{2}{3} \end{cases} \\ r: \begin{cases} x = -1 + 3\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = -3 + 2\alpha \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + 3\alpha = \dfrac{5}{3} + \lambda \\ 2\alpha = \lambda \\ -3 + 2\alpha = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha - \lambda = \dfrac{8}{3} \\ 2\alpha - \lambda = 0 \\ 2\alpha = \dfrac{11}{3} \end{cases} \Rightarrow |A/B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & \frac{8}{3} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{11}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{3} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{11}{3} \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{8}{3} \\ 2 & \frac{11}{3} \end{vmatrix} = -\left(\dfrac{11}{3} - \dfrac{16}{3} \right) = \dfrac{5}{3} \neq 0$$

Continuación del Problema 2 de la opción A

b) Continuación
Como no se cortan (no forman ángulo alguno) hallaremos el ángulo α que forman los vectores directores de ambos

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (3\,,2\,,2) \\ \overrightarrow{v_s} = (1\,,1\,,0) \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\left|(3\,,2\,,2)\cdot(1\,,1\,,0)\right|}{\sqrt{3^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|3+2|}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$$

$$\alpha = arc\cos\left(\frac{5\sqrt{34}}{34}\right) = 30º57'50''$$

3. *(5 puntos)*

a) *(2,25 puntos)* Considere la función : $f(x)=\dfrac{1}{8x-x^2}$ **.**

a.1) *(1,5 puntos)* Determine las asíntotas, si existen, de la función $f(x)$**.**
a.2) *(0,75 puntos)* Determine los extremos relativos, si existen, de la función $f(x)$**.**

b) *(1,25 puntos)* Determine: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left\{\ln\left(x^2\right)\right\}\left(\dfrac{x+1}{x^2+3}\right)\right]$

c) *(1,5 puntos)* Calcule el área de la región encerrada entre las curvas **f(x) = x³** y **g(x) = 2x² - x**

$a)$

$$8x-x^2=0 \Rightarrow (8-x)\,x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow f(0)=\dfrac{1}{8\cdot 0-0^2}=\dfrac{1}{0} \Rightarrow Sin\ solución \\ 8-x=0 \Rightarrow x=8 \Rightarrow f(8)=\dfrac{1}{8\cdot 8-8^2}=\dfrac{1}{0} \Rightarrow Sin\ solución \end{cases}$$

$$Asíntotas\ verticales \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=8 \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{8x-x^2}=\frac{1}{-\infty}=0 \Rightarrow Existe\ asíntota\ horizontal,\ y=0,\ cuando\ x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{8x-x^2}=\frac{1}{-\infty}=0 \Rightarrow Existe\ asíntota\ horizontal,\ y=0,\ cuando\ x\to-\infty$$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{8x^2-x^3}=\frac{1}{-\infty}=0 \Rightarrow No\ existe\ asíntota\ oblicua\ cuando\ x\to\infty$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{8x^2-x^3}=\frac{1}{\infty}=0 \Rightarrow No\ existe\ asíntota\ oblicua\ cuando\ x\to-\infty$$

Continuación del Problema 3

$a.2)$

$$f'(x)=-\frac{8-2x}{\left(8x-x^2\right)^2}=-2\frac{4-x}{\left(8x-x^2\right)^2}\Rightarrow Creciente\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow -2\frac{4-x}{\left(8x-x^2\right)^2}>0\Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2<0\Rightarrow \forall x\in\Re \\ 4-x>0\Rightarrow -x>-4\Rightarrow x<4 \\ \left(8x-x^2\right)^2>0\Rightarrow \forall x\in\Re \end{cases}$$

	$-\infty$ 4	4 ∞
-2 < 0	**(-)**	**(-)**
x < 4	**(+)**	**(-)**
(8x – x^2)^2 > 0	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**

Crecimiento $\forall x\in\Re / x<4$ **Decrecimiento** $\forall x\in\Re / x>4$

Máximo relativo en $x=4\Rightarrow f(4)=\frac{1}{8\cdot 4-4^2}=\frac{1}{16}$ **de crecimiento pasa a decrecimiento**

$b)$

$$Sabiendo\ que\Rightarrow\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(x^2\right)=\infty \\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+3}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{\infty}=0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left\{\ln\left(x^2\right)\right\}\left(\frac{x+1}{x^2+3}\right)\right]=\infty\cdot 0=\lim_{x\to\infty}\ln\left(x^2\right)\cdot\frac{1}{\frac{x^2+3}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^2\right)}{\frac{x^2+3}{x+1}}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{2x(x+1)-\left(x^2+3\right)}{(x+1)^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot(x+1)^2}{x\left(x^2+2x+3\right)}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+2}{x^3+2x^2-3x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\frac{x^2}{x^3}+4\frac{x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+2\frac{x^2}{x^3}-3\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}=\frac{\frac{2}{\infty}+\frac{4}{\infty}+\frac{2}{\infty}}{1+\frac{2}{\infty}-\frac{3}{\infty}}=\frac{0+0+0}{1+0-0}=0$$

$c)$

$$\textit{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x^3=0 \Rightarrow x=0 \\ 2x^2-x=0 \Rightarrow (2x-1)\cdot x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\textit{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow 2x^2-x=x^3 \Rightarrow x^3-2x^2+x=0 \Rightarrow \left(x^2-2x+1\right)x=0 \Rightarrow$$

$$x^2-2x+1=0 \Rightarrow \Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot1=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{0}}{2\cdot1}=1 \Rightarrow (x-1)^2\ x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

$$x=\frac{1}{4}\in\left(0,\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64} \\ 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}=2\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)\,\textit{es positiva} \\ g(x)\,\textit{es negativa} \end{cases}$$

$$x=\frac{3}{4}\in\left(\frac{1}{2},1\right) \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64} \\ 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3}{4}=2\cdot\frac{9}{16}-\frac{3}{4}=\frac{18}{16}-\frac{12}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}=\frac{24}{64} \end{cases} \Rightarrow f(x)>g(x)$$

$$A=\int_0^{\frac{1}{2}} x^3\,dx+\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2x^2-x\right)dx\right|+\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^3\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2x^2-x\right)dx=\int_0^1 x^3\,dx-\int_0^1\left(2x^2-x\right)dx=\int_0^1\left(x^3-2x^2+x\right)dx$$

$$A=\int_0^1\left(x^3-2x^2+x\right)dx=\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_0^1-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1+\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^1=\frac{1}{4}\cdot\left(1^4-0^4\right)-\frac{2}{3}\cdot\left(1^3-0^3\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(1^2-0^2\right)$$

$$A=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{3}{12}-\frac{8}{12}+\frac{6}{12}=\frac{1}{12}\,u^2$$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sea **"a"** un parámetro real cualquiera. Determine el rango de la matriz siguiente según los diferentes valores del parámetro **"a"**: $A=\begin{pmatrix} a+1 & -1 & a+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$

b) *(1 punto)* Se considera una matriz de orden 3×3 cuyas columnas son C_1, C_2 y C_3 y cuyo determinante es 2.
Se define ahora la matriz B cuyas columnas son $-C_2$, C_3+C_2 y $3C_1$. Determine el determinante de la inversa de B, si existe.

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} a+1 & -1 & a+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix} a+1 & a+1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=-\left[a\,(a+1)-(a+1)\right]=-\left(a^2+a-a-1\right)=1-a^2 \Rightarrow$$

$$Si\ |A|=0 \Rightarrow 1-a^2=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

$$\forall a \in \Re-\{-1\,,1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A)=3$$

$Si\ a=-1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\ (A)=2$$

$Si\ a=1$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\ (A)=2$$

$b)$

$$|A|=|C_1 \quad C_2 \quad C_3|=2$$

$$|B|=|-C_2 \quad C_3+C_2 \quad 3C_1|=|-C_2 \quad C_3 \quad 3C_1|+|-C_2 \quad C_2 \quad 3C_1|=$$

$$=(-1)\cdot|C_2 \quad C_3 \quad 3C_1|+(-1)\cdot|C_2 \quad C_2 \quad 3C_1|=(-1)\cdot 3\cdot|C_2 \quad C_3 \quad C_1|+(-1)\cdot 0=(-3)\cdot|C_2 \quad C_3 \quad C_1|+0=$$

$$=(-3)\cdot(-1)\cdot|C_1 \quad C_3 \quad C_2|=(-1)\cdot 3\cdot|C_1 \quad C_2 \quad C_3|=(-3)\cdot 2=-6 \Rightarrow \left|B^{-1}\right|=\frac{1}{|B|}=-\frac{1}{6}$$

2. *(2 puntos)* Considere el plano π y la recta r que aparecen a continuación:

$$\pi: mx-3y+2z=1 \quad r:\begin{cases} 3x+y=1 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases}$$

a) *(1 punto)* Determine para qué valores del parámetro "m" la recta r y el plano π son secantes, es decir, se cortan.

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman el plano π y la recta r cuando m = 1.

a) Estudiaremos el sistema de ecuaciones formado por las tres ecuaciones, cuando el sistema, así formado, sea compatible determinado el plano π y la recta **r** se cortan en un punto

$$\begin{cases} mx-3y+2z=1 \\ 3x+y=1 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} m & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} m-2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(m-2+6) = 2\cdot(m+4) \Rightarrow$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow 2\cdot(m+4) = 0 \Rightarrow m+4=0 \Rightarrow m=-4 \Rightarrow$$

$$\forall m \in \Re - \{-4\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Se\ cor\tan\ en\ un\ punto\ el\ plano\ \pi\ y\ la\ recta\ r$$

$b)$

$$y=1-3x \Rightarrow 2x-(1-3x)+2z=1 \Rightarrow 2x-1+3x+2z=1 \Rightarrow 2z=2-5x \Rightarrow z=1-\frac{5}{2}x \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_r} = \left(1, -3, -\frac{5}{2}\right) \equiv (2, -6, -5) \Rightarrow sen\ \alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_\pi}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_\pi}\right|} = \frac{|(2, -6, -5)\cdot(1, -3, 2)|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+(-5)^2}\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}} \Rightarrow$$

$$sen\ \alpha = \frac{|2+18-10|}{\sqrt{4+36+25}\sqrt{1+9+4}} = \frac{|10|}{\sqrt{65}\sqrt{14}} = \frac{10}{\sqrt{910}} = \frac{10\sqrt{910}}{910} = \frac{\sqrt{910}}{91} \Rightarrow$$

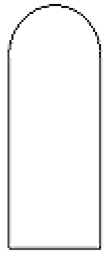
$$\alpha = arc\ sen\left(\frac{\sqrt{910}}{91}\right) = 19^{o}21'35''$$

3. *(5 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Determine el límite: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{2x-1}-\frac{3}{2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}$

b) *(1,5 puntos)* Usando el cambio de variable **t = cos x** calcule $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen\ x\cos x}{1-\cos x}\,dx$

Continuación del enunciado del problema 3
c) *(2 puntos)* Queremos construir una ventana con la forma de la figura que aparece debajo, es decir rectangular en la parte inferior y semicircular en la superior (la parte superior es un semicírculo completo).



Sabiendo que el perímetro total de la ventana son 5 metros, determine las dimensiones de la ventana para que la superficie de la misma sea máxima.

$a)$

$$\text{Sabiendo que} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{2x-1}-\frac{3}{2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{10x+2-6x+3}{2\cdot(2x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+5}{4x-2}=1 \\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x-1}=\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{2x-1}-\frac{3}{2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=1^\infty=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+5}{4x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-2+5+2}{4x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-2+7}{4x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-2}{4x-2}+\frac{7}{4x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{4x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4x-2}{7}}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{4x-2}{7}}\right)^{\frac{4x-2}{7}}\right]^{\cdot\frac{2x^2+1}{x-1}\cdot\frac{7}{4x-2}}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\cdot\frac{2x^2+1}{x-1}\cdot\frac{7}{4x-2}\right)}=e^{\frac{7}{2}}=\sqrt{e^7}\quad de\ (1)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x-1}\cdot\frac{7}{4x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{14x^2+7}{4x^2-2x-4x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{14x^2+7}{4x^2-6x+2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{14\frac{x^2}{x^2}+\frac{7}{x^2}}{4\frac{x^2}{x^2}-6\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14+\frac{7}{x^2}}{4-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{14+\frac{7}{\infty}}{4-\frac{6}{\infty}+\frac{2}{\infty}}=\frac{14+0}{4-0+0}=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}\quad(1)$$

Continuación del Problema 3 de la opción B

b)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1-\cos x} sen\ x\, dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{1-t}(-dt) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{t-1} dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} dt + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t-1} = [t]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t-1}$$

$$\cos x = t \Rightarrow -sen\ x\, dx = dt \Rightarrow sen\ x\, dx = -dt \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} t & \underline{t-1} \\ \underline{-t+1} & 1 \\ 1 & \end{array} \qquad \frac{t}{t-1} = 1 + \frac{1}{t-1}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1-\cos x} sen\ x\, dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \int_{\frac{\sqrt{2}-2}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + [\ln u]_{\frac{\sqrt{2}-2}{2}}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \ln\left(-\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}-2}{2}\right)$$

$$t - 1 = u \Rightarrow dt = du \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow u = -\dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \dfrac{\sqrt{2}-2}{2} \end{cases}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1-\cos x} sen\ x\, dx = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \ln\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}-2}{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \ln\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \ln\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)$$

c)

Siendo **R** el radio de la parte curva y **H** la altura del rectángulo

$$\begin{cases} 5 = \pi R + 2H + 2R \Rightarrow 5 = (\pi+2)R + 2H \Rightarrow 2H = 5 - (\pi+2)R \Rightarrow H = \dfrac{5-(\pi+2)R}{2} \\ S = \dfrac{\pi R^2}{2} + 2RH \end{cases} \Rightarrow$$

$$S = \frac{\pi R^2}{2} + 2R \cdot \frac{5-(\pi+2)R}{2} = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{10R - 2\cdot(\pi+2)R^2}{2} = \frac{\pi R^2 + 10R - 2\pi R^2 - 4R^2}{2} = \frac{10R - \pi R^2 - 4R^2}{2}$$

$$S = \frac{10R - (\pi+4)R^2}{2} \Rightarrow S' = \frac{dS}{dR} = \frac{1}{2}[10 - 2(\pi+4)R] = 5 - (\pi+4)R \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow 5 - (\pi+4)R = 0 \Rightarrow$$

$$R = \frac{5}{\pi+4} \Rightarrow S'' = \frac{d^2S}{dR^2} = -(\pi+4) < 0 \Rightarrow Máximo \Rightarrow$$

$$\begin{cases} R = \dfrac{5}{\pi+4}\ m \\ H = \dfrac{5-(\pi+2)\cdot\dfrac{5}{\pi+4}}{2} = \dfrac{5\pi + 20 - 5\pi - 10}{2(\pi+4)} = \dfrac{5}{\pi+4}\ m \end{cases}$$